Die *ganzen* Zahlen kann man bekanntlich in *gerade* und *ungerade* Zahlen aufteilen:

gerade	**ungerade**
...	...
10	11
8	9
6	7
4	5
2	3
0	**1**
-2	-1
-4	-3
...	...

gerade	**ungerade**
...	...
2·5	2·5+1
2·4	2·4+1
2·3	2·3+1
2·2	2·2+1
2·1	2·1+1
2·0	2·0+1
2·(-1)	2·(-1)+1
2·(-2)	2·(-2)+1
...	...
2·k	**2·k+1**

Man kann sie aber auch anders aufteilen. Vervollständige die Tabelle:

...	...	...
9		
6		
3	4	5
0	**1**	**2**
-3	-2	
...	...	...
3·k		

In welche Spalten dieser Tabelle gehören die Zahlen 23, 44, 76, 321, 1335 ?

Beobachtung: Jede Spalte besteht genau aus allen Zahlen, die beim Teilen durch 3 denselben Rest lassen. Die möglichen Reste sind 0, 1 und 2. Sie stehen in der fettgedruckten Zeile. Die Spalten heißen „Restklassen beim Teilen durch 3“. Mathematiker sagen dazu auch kürzer „Restklassen modulo 3“.

(Was hat das mit *gerade* und *ungerade* zu tun?)

Vervollständige die Tabelle der Restklassen modulo 7:

...	...	...	...	...	...	...
14	15					
7	8	9	10			
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
-7	-6	-5	-4			
...	...	...	...	...	...	...
7·k	**7·k+1**					

In welche Spalten gehören jetzt die Zahlen 23, 44, 75, 321, 1335 ?

Erläuterungen:

Die Zahlen 23 und 44 stehen in derselben Spalte (gehören zu derselben Restklasse modulo 7). Man schreibt dafür:

$23 \equiv 44 \pmod 7$

Das heißt soviel wie: „23 und 44 haben beim Teilen durch 7 denselben Rest.“ Mathematiker sagen stattdessen „23 ist kongruent 44 modulo 7“, was aber genau dasselbe bedeutet.

Wenn eine der Zahlen neben dem „≡“-Zeichen zwischen 0 und 6 liegt, also zu den fettgedruckten Zahlen in der Tabelle gehört, ist es der Siebenerrest selbst. Z.B. bedeutet „$158 \equiv 4 \pmod 7$“, dass 158 beim Teilen durch 7 den Rest 4 hat, und „$308 \equiv 0 \pmod 7$“ bedeutet, dass man 308 ohne Rest durch 7 teilen kann.

Die Differenz von zwei Zahlen aus derselben Spalte ist immer ein Vielfaches von 7.

Statt 7 kann man natürlich auch irgendeine andere ganze Zahl *n* größer oder gleich 2 nehmen und Restklassen modulo *n* bilden.

„$a \equiv b \pmod n$“ bedeutet, dass *a* und *b* beim Teilen durch *n* denselben Rest lassen.

„$a \equiv b \pmod n$“ bedeutet auch, dass $a - b$ ein Vielfaches von *n* ist.

Aufgaben:

1. Heute ist Mittwoch, der 26.1.2005. Welcher Wochentag ist der 24.10.2005?

   Lösung: Zuerst rechnet man aus, wie viele Tage bis zum 24.10.2005 vergehen:

		besser: nur die Siebenerreste addieren
Januar:	noch 5	5
Februar:	28	0
März:	31	3
April:	30	2
Mai:	31	3
Juni:	30	2
Juli:	31	3
August:	31	3
September:	30	2
Oktober:	24	3
insgesamt:	271	26

   Nach jeweils 7 Tagen ist wieder Mittwoch, also interessiert uns nur der Siebenerrest: $271 \equiv 5 \pmod 7$. Fünf Tage weiterzählen ergibt die Antwort: Der 24.10.2005 ist ein Montag. Oder: $271 \equiv -2 \pmod 7$. Zwei Tage rückwärts zählen ergibt ebenfalls Montag. Mit 26 statt 271 erhält man das gleiche Ergebnis!

2. Der 1.1.2005 war ein Samstag. Welcher Wochentag ist der 1.1.2020?

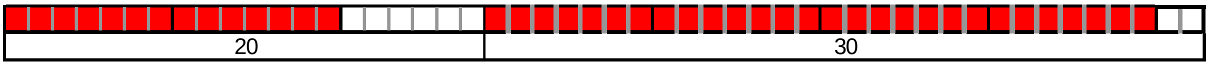
   Lösung: Ein Jahr hat gewöhnlich 365 Tage, ein Schaltjahr 366. Es genügt, für jedes Jahr den 7er-Rest dieser Zahl zu addieren. (Der 1.1.2006 ist z.B. ein Sonntag, weil 365 den Siebenerrest 1 hat.) Unter den insgesamt 15 Jahren sind 3 Schaltjahre. Die Summe ist also $12 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 18$. Der Siebenerrest davon ist 4, also ist der 1.1.2020 ein Mittwoch.

3. Welcher Wochentag ist Dein nächster (übernächster) Geburtstag?

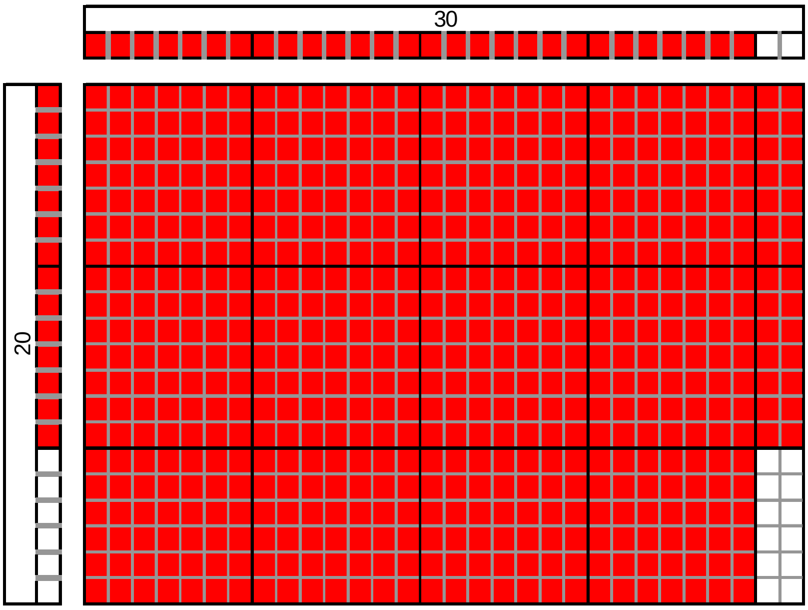
4. Denke Dir 8 ganze Zahlen aus und berechne deren Siebenerreste. Mindestens zwei davon sind gleich (stimmt's?). Warum muss das so sein?

5. Wie man leicht nachrechnen kann, ist $10 \equiv 3 \pmod 7$, $20 \equiv 6 \pmod 7$, $30 \equiv 2 \pmod 7$. Finde eine Regel, um möglichst einfach daraus die Siebenerreste von 40, 50, ..., 100, 200, 300, 600 zu bestimmen.

Berechnung des Siebenerrestes eine Summe: Addiere statt der Summanden nur deren Siebenerreste und bilde vom Ergebnis wieder den Siebenerrest.
Beispiel: $50 = 20 + 30 \equiv 6 + 2 = 8 \equiv 1 \pmod 7$.



Berechnung des Siebenerrestes eine Produkts: Multipliziere statt der Faktoren nur deren Siebenerreste und bilde vom Ergebnis wieder den Siebenerrest.
Beispiel: $600 = 20 \cdot 30 \equiv 6 \cdot 2 = 12 \equiv 5 \pmod 7$.



Das Ganze funktioniert auch, wenn man statt 7 einen anderen Teiler („Modul") *n* benutzt: Berechne wie oben die Achterreste (Elferreste) von 20, 30, 50, 600.

Rechenregeln für Reste modulo *n*:

Wenn	$a \equiv a' \pmod n$ und $b \equiv b' \pmod n$,
dann	$a + b \equiv a' + b' \pmod n$
und	$a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod n$.

Dabei sind a, a', b, b', und n irgendwelche ganze Zahlen, wobei der Modul $n \geq 2$ ist.

Aufgaben:

1. Berechne den Siebenerrest von $2^3, 2^6, 2^9, 2^{10}, 2^{20}$.
2. Berechne den Fünferrest von $2^4, 2^8, 2^{20}, 3^4, 3^{20}$.
3. Beweise die Behauptung: „Die Zahl 3^{20} hat die Endziffer 1 oder 6."
4. Berechne die Endziffern von $3^{20}, 3^{40}, 3^{2005}$.

