Aufgabe 1

Ein einfaches, einführendes Rechenbeispiel

$f(x) = x^2-2x+2$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t und der Normalen n an den Graphen von f im Punkt $P(2;2)$.

Analyse im Unterrichtsgespräch: Die Tangente müsste als Anstieg genau die Ableitung von f an der Stelle 2 haben. Der Ansatz für eine Geradengleichung lautet:

t: $y = mx+n$

Wir haben: m, den Anstieg (noch nicht ganz)

y ist 2, x ist auch 2 (aus dem Punkt P)

Ableitung von f: $f'(x) = 2x-2$

$$f'(2) = 2*2-2 = \underline{\underline{2 = m}}$$

Nun haben wir im Ansatz bis auf n alle Variablen bestimmt:

$$2 = 2*2+n$$

$$\underline{\underline{n = -2}}$$

Also lautet die Gleichung der Tangente: t: $y = 2x-2$.

Dass die Variablen x und y jetzt wieder welche sein müssen, ist den Lernenden klarzumachen. Bereits hier verlieren manche Schülerinnen und Schüler den Überblick und brauchen noch eine Rückschau auf das Ziel „Geradengleichung“.

Nun erfolgt eine visuelle Kontrolle mit dem Funktionsplotter „Analysis mobil“ auf dem Telefon. Zunächst müssen die Computer-Terme ermittelt werden.

Analog zum Begriff „Computer-Algebra“ führe ich den Begriff „Computer-Term“ für die einzeilige Eingabe von Termen im Rechner ein. Die Computer-Terme werden gemeinsam erarbeitet. Damit wird das Nachdenken über Strukturen gefördert, denn Vorrangregeln lassen sich nun häufig nur über Klammern umsetzen. Jeder verwendete Computer-Term wird neben den entsprechenden Term an die Tafel geschrieben.

Für f lautet dieser `x^2-2x+2`, für t ist er `2x-2`. Beide werden in die Liste der Funktionen auf dem Telefon aufgenommen:

Vorbereitung der quadratischen Funktion: Eingabe im Menüpunkt „Neu“. Während der Eingabe wechselt die Anzeige zwischen zwei Tastaturlayouts. Speichern mit Menüpunkt „In Liste aufnehmen“ (**Abb. 1** bis **Abb. 4**).

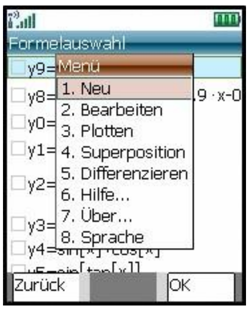

Abb. 1

Abb. 2

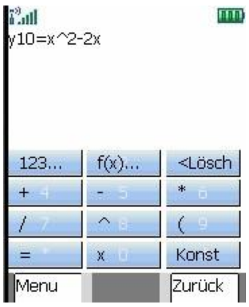

Abb. 3

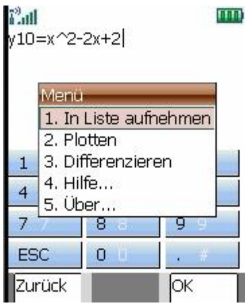

Abb. 4

Wiederholen des Vorgangs mit dem Tangententerm `2x-2`, Markieren beider Funktionen in der Liste, damit gleichzeitiges Darstellen durch Menüpunkt „Plotten" (**Abb.5** und **Abb. 6**). Das Ergebnis (**Abb. 7**) zeigt tatsächlich eine Tangente in (2;2).

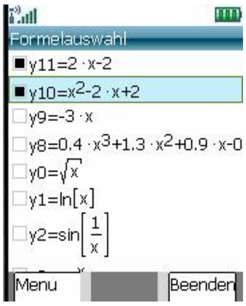

Abb. 5

Abb. 6

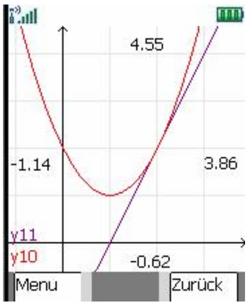

Abb. 7

Nun folgt die Bestimmung der Normalen. Es wird herausgearbeitet, dass diese senkrecht auf t steht und damit das Anstiegsdreieck um 90° gedreht wird. So vertauschen sich Zähler und Nenner im Anstieg und ein Vorzeichen (**Abb. 8**)

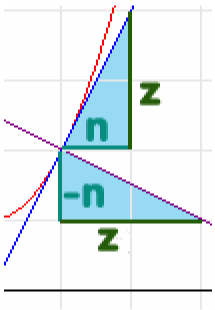

Abb. 8

Anstiegsdreieck: m = senkrechte Kathete : waagerechte Kathete
Tangente: *m = z/n*, Normale: *m = -n/z*. Somit gilt die Beziehung

$$m_n = -1/m_t$$

Nach dem oben beschriebenen Muster wird nun die Normalengleichung bestimmt (y=`-1/2x+3` als Computerterm). Das Telefon kann nun die ergänzte Gleichung der Normalen darstellen.

Da das Raster immer streng quadratisch aufgeteilt ist, sieht man die Normalen-Eigenschaft sehr gut: Ein rechter Winkel auf (2;2).

Abb. 9 und **Abb. 10** zeigen das Ergebnis.

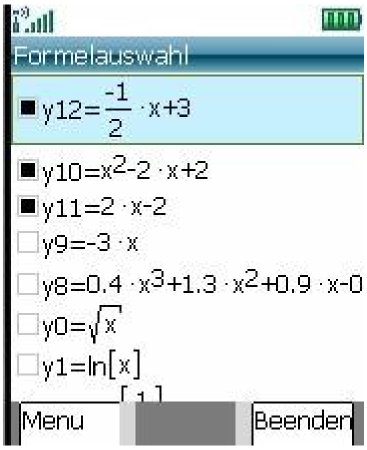

Abb. 9

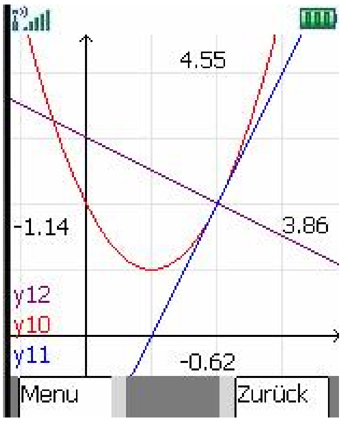

Abb. 10

Aufgabe 2

Eine etwas schwierigere Aufgabe:

Zur Funktion $y = x^3\text{-}3x^2$ sind alle Stellen für Tangenten an den Graphen zu finden, die den Anstieg 1 haben.

Der Graph ist im Lehrbuch abgebildet (siehe **Abb.11**). Es gibt zwei mögliche Stellen für Tangenten mit Anstieg 1. (orange markiert), links von 0, rechts von 2.

Offenbar sind jetzt nicht die Stellen, sondern der Anstieg bekannt. Wir erarbeiten, dass die Stellen durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 1$ errechnet werden müssen.

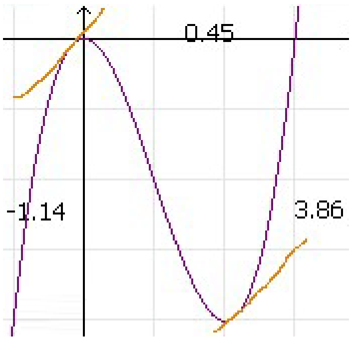

Abb. 11

Rechenweg:

$$f'(x) = 3x^2\text{-}6x = 1$$

$$3x^2\text{-}6x\text{-}1 = 0$$

$$x^2\text{-}2x\text{-}1/3 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{3}}$$

Die Wurzel hat den Taschenrechner-Wert 1,1547... Offenbar war die Schätzung korrekt. Die Stellen schwanken um den Wert 1.

Für schnelle und sichere Rechner besteht die Möglichkeit, die Tangenten selbst auszurechnen.

Ein Schüler tat dies und gab die recht unrunden Werte ein. Es ergab sich, dass mit höchster Taschenrechnergenauigkeit die dargestellten Geraden recht gut dargestellt werden. Werden nur zwei Stellen nach dem Komma genommen, werden die Geraden als Sekanten oder Passanten dargestellt. (korrekte Darstellung in ***Abb. 12****) Das Ergebnis stellte er den anderen Lernenden vor.*

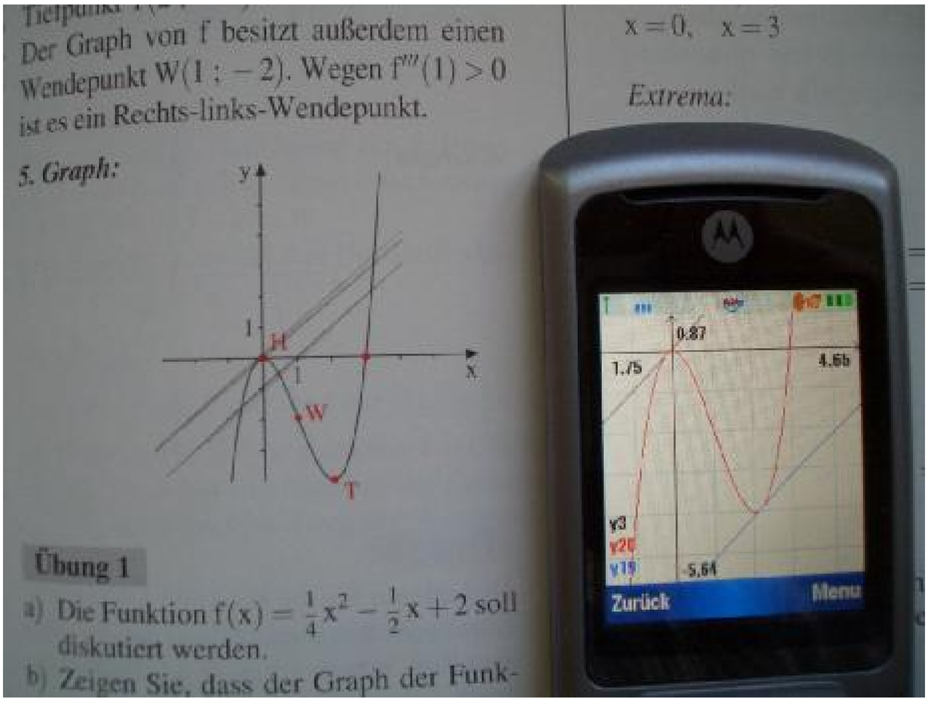

Abb. 12

Aufgabe 3

Eine Aufgabe mit einer gebrochen-rationalen Funktion

An den Graphen der gebrochen-rationalen Funktion $y = \frac{1}{x^2 - 2}$ sollen im Punkt *P(-1;f(-1))* die Tangente und die Normale ermittelt werden.

Zur Veranschaulichung kann mit dem Computer-Term `1/(x^2-2)` *ein Graph gezeichnet werden, um einen Überblick über das Problem zu bekommen. Offenbar ist der fragliche Punkt (-1;-1).*

Um den Computer-Term korrekt zu bestimmen, muss die Klammerung des Nenners herausgearbeitet werden, da sonst die Division Vorrang bekommt. Falsch wäre `1/x^2-2`.

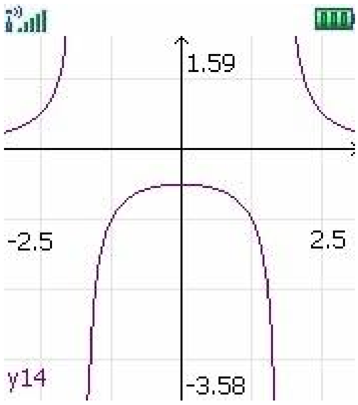

Abb. 13

Hier muss zunächst der Funktionswert von 1 ermittelt werden. Er beträgt *1/(1²-2) = -1*

Für den Ansatz *y = mx+n* sind nun *x* und *y* bekannt, *m* muss noch ermittelt werden. Die Ableitung lautet $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 2)^2}$, und *m = f'(-1)* beträgt *(-2)*(-1)/(1²-2)² = 2*.

Die Ableitung kanZn mit Hilfe des Telefons überprüft werden, da eine formelmäßige Bestimmung der Ableitung im Programm vorgesehen ist. In diesem Fall ist die Berechnung auch recht übersichtlich (das Programm vereinfacht Terme noch nicht so gut).

Abb. 14

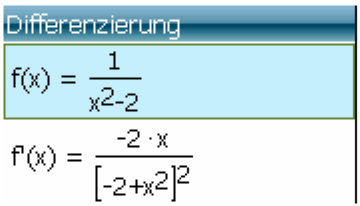

Abb.15

Es ist festzuhalten, dass jetzt der Anstieg der Tangente feststeht, und nun der Ansatz der Geradengleichung zum Berechnen von *n* bereitsteht. Nun kann analog zum einführenden Beispiel die Tangente und die Normale ausgerechnet werden. Es ergeben sich runde Werte, die von allen ohne weitere Probleme berechnet werden können.

Die Lösung lautet *t: y* = `2x+1` und *n: y* = `-1/2x-1,5` (Computer-Terme). Zur Kontrolle sollte das Bild wieder mit dem Java-Telefon angezeigt werden. Wiederum sind drei Terme zu markieren und gemeinsam darzustellen (**Abb. 16** und **Abb. 17**)

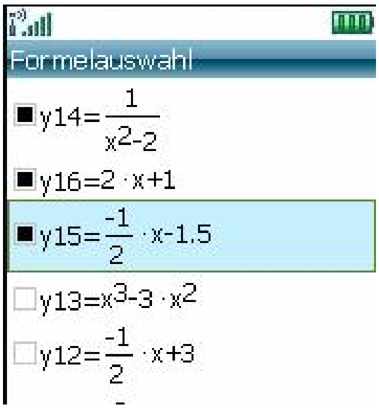

Abb. 16

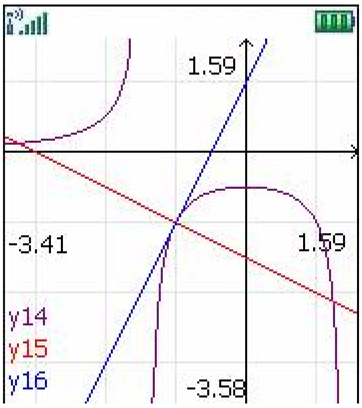

Abb. 17